Nemlineáris rendszerek stabilitásának vizsgálata Ljapunov módszerével *

Kiss Bálint†

1 Bevezetés

Az előadás nemlineáris rendszerek stabilitásának vizsgálatával foglalkozik. A szükséges matematikai fogalmak bevezetése után Ljapunov[1] direkt és indirekt módszerei kerülnek tárgyalásra homogén, időben változó rendszerek esetében.

2 Homogén rendszerek

A Ljapunov módszerek, legalábbis ahogy a következőekben bemutatásra kerülnek, bemenet nélküli, azaz homogén rendszerek esetében alkalmazhatóak egy egyensúlyi pont vagy más megoldás stabilitásának vizsgálatára. Ugyanakkor az irányítástechnikában vizsgált rendszereknek bemenetei is vannak, így először megmutatjuk, hogy az állapotviszacsatolással hogyan juthatunk homogén rendszerhez.

Tekintsünk egy nemlineáris rendszert, melyet egy közönséges elsőfokú differenciálegyenlet ír le:

$$\dot{x} = \phi(t, x, u) \qquad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

ahol x az állapotvektor és u a bemenetek vektora. Az $\dot{x}$ jelölés egyenértékű $\frac{d}{dt}x(t)$-vel. Tegyük fel, hogy az $x(t) \equiv 0, u(t) \equiv 0$ esetén teljesül, hogy

$$\phi(t, 0, 0) = 0. \tag{1}$$

Tegyük fel továbbá, hogy egy

$$u = \gamma(x) \tag{2}$$

állapotvisszacsatolást alkalmazunk a rendszerre, melyre

$$0 = \gamma(0). \tag{3}$$

Feltételezhetnénk bonyolultabb visszacsatolást is, de itt csak az a célunk, hogy megmutassuk miképp juthatunk homogén differenciálegyenletre zárt körben, amely a fenti visszacsatolással

$$\dot{x} = \phi\left(t, x, \gamma(x)\right)$$

*Irányításelmélet előadás segédanyag

†Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem, Irányítástechnika és Informatika Tanszék, e-mail: bkiss@seeger.iit.bme.hu, tel.: 463-4026

[1]Alekszander Mihajlovics Ljapunov, orosz matematikus, 1857 június 6. Jaroslav - 1918 november 3. Odessza

alakú. Ha $x(t) \equiv 0$, akkor az (1) és (3) feltételek miatt

$$\phi(t, 0, \gamma(0)) = 0.$$

Legyen a továbbiakban

$$f(t, x) \stackrel{def}{=} \phi(t, x, \gamma(x)). \tag{4}$$

Egy $\xi : t \in \mathbb{R} \rightarrow \xi(t) \in \mathbb{R}^n$ függvényről azt mondjuk, hogy megoldása (integrálgörbéje) (4)-nek, ha

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = f(t, \xi(t)).$$

Matematikailag pontosítva a feladatot, a továbbiakban az

$$\dot{x} = f(t, x) \quad f(t, 0) \equiv 0 \quad f \in C^{(0,1)}_{t,x}([a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n), \quad 0 \in D_x \tag{5}$$

homogén differenciálegyenlet $\xi(t) \equiv 0$, $t \in [a, \infty)$ megoldásának stabilitását vizsgáljuk. Feltesszük, hogy f függvény t-ben folytonos és x-ben folytonosan differenciálható az $[a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n$ tartományon. (Az $f \in C^{(0,1)}_{t,x}([a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n)$ jelölés pontosan ezt jelenti.)

2.1 A $\xi(\mathbf{t}) \neq 0$ eset kezelése

Megmutatjuk hogyan vezethető vissza az előző esetre egy $\xi(t) \neq 0$ megoldás vizsgálata. Úgy fogunk eljárni, hogy az eredeti rendszert transzformáljuk $\xi(t) \neq 0$ függvényében és belátjuk, hogy a transzformáció $\xi(t) \neq 0$ megoldást a transzformált rendszer azonosan nulla megoldásába viszi át.

A transzformáció vizsgálata előtt most is a homogén egyenlere vezető visszacsatolást tárgyaljuk elsőként. Kezdjük megint a felnyitott körben adott rendszerrel:

$$\dot{x} = \phi(t, x, u)$$

és legyen ennek megoldása $\xi(t)$, azaz feltesszük, hogy létezik $\mu(t)$, amelyre

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \phi(t, \xi(t), \mu(t)). \tag{6}$$

Alkalmazzunk ezúttal is egy

$$u = \gamma(x)$$

visszacsatolást melyre teljesül, hogy

$$\mu(t) = \gamma(\xi(t)). \tag{7}$$

A zárt kör differenciálegyenlete

$$\dot{x} = \phi(t, x, \gamma(x)) \stackrel{def}{=} f(t, x), \tag{8}$$

és vegyük észre, hogy (6) és (7) biztosítják, hogy $\xi(t)$ megoldás zárt körben is, azaz

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \phi(t, \xi(t), \gamma(\xi(t))) = \phi(t, \xi(t), \mu(t)) = f(t, \xi(t)).$$

Most tehát a

$$\dot{x} = f(t, x) \quad f(t, \xi(t)) = \frac{d}{dt}\xi(t) \quad f \in C^{(0,1)}_{t,x}([a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n), \quad \xi(t) \in D_x$$

egyenlet $\xi(t)$ megoldásának stabilitásvizsgálata a feldat. Ezt szeretnénk visszavezetni az $\xi(t) \equiv 0$ esetre.

Ehhez most tekintsük a

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \xi(t) \tag{9}$$

transzformációt. Ez (8) minden megoldásához hozzárendel egy $\tilde{x}(t)$ görbét. Írjuk fel, hogy ezek a görbék milyen differenciálegyenletet elégítenek ki:

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t) - \frac{d}{dt}\xi(t) = f(t,x) - \frac{d}{dt}\xi(t).$$

Mivel (9) egyenletből $x(t) = \tilde{x}(t) + \xi(t)$ és $\xi(t)$ megoldása (8) egyenletnek, ezért a megfelelő behelyettesítések után a

$$\frac{d}{dt}\tilde{x}(t) = f(t, \tilde{x}(t) + \xi(t)) - f(t, \xi(t)) \stackrel{def}{=} \tilde{f}(t, \tilde{x}(t))$$

egyenletet kapjuk. Tehát a (9) transzformáció az $\dot{x} = f(t,x)$ minden egyes megoldásához hozzárendeli az $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(t,\tilde{x})$ egy megoldását (és csak egyet). Ez $\tilde{f}$ fenti konstrukciójából adódik. Most nézzük, hogy hogyan transzformálódik az eredeti rendszer $x(t) = \xi(t)$ megoldása. A (9) transzformáció szerint

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \xi(t) = \xi(t) - \xi(t) \equiv 0.$$

Tehát elértük, hogy a transzformáció a vizsgált $\xi(t)$ megoldást az új rendszer azonosan nulla megoldásába transzformálja. Így az $\dot{x} = f(t,x)$ rendszer $\xi(t)$ megoldásának stabilitásvizsgálta egyenértékű az $\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(t,\tilde{x})$ rendszer azonosan nulla megoldásának stabilitásvizsgálatával.

3 Stabilitás definíciók

Tisztázzuk először szemléletesen mit jelent a Ljapunov féle stabilitás. Adott az $\dot{x} = f(t,x)$ differenciálegyenlet egy $\xi(t)$ megoldása. Most vegyük a differenciálegyenlet azon megoldásait, amelyek valamely t időpillanatban az $\xi(t)$ megoldás egy környezetébe kerülnek. Ha ezek a megoldások megmaradnak $\xi(t)$ megoldás egy környezetében ahogy *előre* haladunk az időben, akkor $\xi(t)$ megoldást Ljapunov értelemben stabilnak mondjuk. Ha ezek a megoldások minden határon túl megközelítik $\xi(t)$-t az időben előre haladva, akkor $\xi(t)$ aszimptotikusan stabil megoldás.

Ez azt is jelenti, hogy akárhol kicsit perturbálva $\xi(t)$ megoldást, áttérve egy, a környezetében futó másik integrálgörbére, $\xi(t)$ megoldás közelében maradunk.

Következzenek a definíciók.

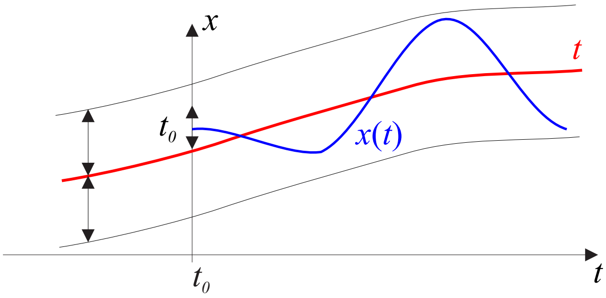
Definíció 1 (Ljapunov stabilitás) *Az (5) rendszer $\xi(t) \equiv 0$, $t \in [a, \infty)$ megoldása Ljapunov stabil ha minden $t_0 \in [a,\infty)$-hoz és ϵ pozitív számhoz található egy $\delta(\epsilon, t_0)$ pozitív szám, melyre ha $\|x(t_0)\| < \delta(\epsilon, t_0)$, akkor minden $t > t_0$-ra teljesül, hogy $\|x(t)\| < \epsilon$.*

Illusztrációként lásd a 1. ábrát.

Definíció 2 (egyenletes Ljapunov stabilitás) *Az (5) rendszer $\xi(t) \equiv 0$, $t \in [a,\infty)$ megoldása egyenletesen Ljapunov-stabil, ha*

1. *$\xi(t) \equiv 0$ megoldás Ljapunov stabil*

2. *δ független t_0-tól*



ábra 1: Illusztráció a Ljapunov stabilitás definíciójához.

Definíció 3 (aszimptotikus Ljapunov stabilitás) *A (5) rendszer $\xi(t) \equiv 0$, $t \in [a, \infty)$ megoldása aszimptotikusan Ljapunov-stabil ha minden $t_0 \in [a, \infty)$-hoz található egy $\delta(t_0)$ melyre ha $\|x(t_0)\| < \delta(t_0)$ akkor $\lim_{t \to 0} \|x(t)\| = 0$*

Megjegyezzük, hogy a Ljapunov stabilitás mellett más stabilitási definíciók is vannak, pl. egy pont Poisson féle stabilitása, amelyekre itt nem térünk ki.

4 Ljapunov direkt és indirekt módszere

A két tétel kimondása előtt be kell vezetnünk néhany technikai jellegű fogalmat.

Definíció 4 (skalárértékű függvények definitsége) *Adott*

$$V : (t, x) \in ([a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n) \to V(t, x) \in \mathbb{R}$$

skalárértékű függvény. Ha létezik egy folytonos $W : x \in D_x \to W(x) \in \mathbb{R}$ skalárértékű függvény melyre teljesül, hogy

1. $V(t, 0) = W(0) = 0$
2. $V(t, x) \geq W(x) > 0$ *ha* $\|x\| \neq 0$,
3. $W(\cdot, x) \to \infty$ *ahogy* $\|x\| \to \infty$

akkor V pozitív definit.

Ha 2-ben $V(t, x) \geq W(x) > 0$ helyett $V(t, x) \leq -W(x) < 0$ szerepel, akkor V negatív definit.

A továbbiakban a $V(t, x)$ függvény t szerinti parciális deriváltját V_t-vel, x szerinti parciális deriváltját pedig V_x-el jelöljük.

Definíció 5 ($\mathbf{V(t, x)}$ idő szerinti deriváltja $\mathbf{\dot{x} = f(t, x)}$ megoldásai mentén) *Adott*

$$V : (t, x) \in ([a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n) \to V(t, x) \in \mathbb{R}$$

skalárértékű függvény és $\dot{x} = f(t, x)$, $f \in C^{(0,1)}_{t,x}([a, \infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n)$, $\xi(t) \in D_x$. V(t,x) idő szerinti deriváltja $\dot{x} = f(t, x)$ megoldásai mentén a

$$\dot{V}(t, x) = V_x \cdot f(t, x) + V_t$$

kifejezés.

Vegyük észre, hogy $\dot{V}(t,x)$ egy skalár, hiszen

$$V_x = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right]$$

egy sorvektor, $f(t,x)$ egy oszlopvektor és V_t pedig egy skalár.

A szemléletesség kedvéért: tekintsük $V(t,x)$ értékét a t időpillanatban az x helyen és vegyük az $\dot{x} = f(t,x)$ rendszernek azt a megoldását, amelyik t időpillanatban ezen az x ponton megy keresztül (ilyenből csak egy van). Ekkor $V(t,x)$ idő szerinti deriváltja e megoldás mentén azt fejezi ki, hogy mekkora lenne $V(t,x)$ változásának sebessége e megoldás mentén elmozdulva.

Tétel 1 (Ljapunov direkt módszere) *Adott az* (5) *rendszer.*

1. *Ha létezik $V(t,x) \in C^{1,1}_{t,x}([a,\infty) \times D_x \subset \mathbb{R}^n)$ pozitív definit függvény, hogy minden $x(t)$ megoldásra*
$$\dot{V}(t,x) \leq 0,$$
akkor $\xi(t) \equiv 0$ megoldás Ljapunov stabil.

2. *Ha pótlólagosan*
$$\dot{V}(t,x) \begin{cases} < 0 \text{ ha } x \neq 0 \\ = 0 \text{ ha } x = 0 \end{cases}$$
akkor $\xi(t) \equiv 0$ megoldás aszimptotikusan Ljapunov stabil[2].

A tétel azt mondja ki, hogy ha találunk egy olyan mindenütt pozitív függvényt, amely csak ott nulla ahol a stabilitás szempontjából vizsgált pályán vagyunk, és amely bármilyen megoldás mentén legfeljebb csak csökkenhet, akkor a megoldások a nulla valamely környezetében maradnak (1. eset), esetleg aszimptotikusan megközelítik azt (2. eset). A tétel feltételeit kielégítő $V(t,x)$ függvény megtalálása nehéz feladat is lehet, bár egyes rendszerosztályok esetén léteznek konstruktív módszerek. Sőt, olyan módszerek is léteznek, amellyel az (2) visszacsatolást egy Ljapunov függvény kandidáns alapján tervezzük úgy, hogy a zárt kör a Ljapunov függvény kandidánssal a tétel feltételeit kielégítse. Ezekre itt nem térünk ki hanem egy egyszerű példát vizsgálunk.

Példa 1 Adott a

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1,x_2) = -x_2 - x_1^3 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1,x_2) = x_1 - x_2^3 \end{aligned}$$

időinvariáns rendszer. Bizonyítsuk be, hogy az $(x_1,x_2) \equiv (0,0)$ megoldás aszimptotikusan stabil.

Próbálozzunk a $V(x) = x_1^2 + x_2^2$ Ljapunov függvény kandidánssal. Ennek az idő szerinti deriváltja az adott rendszer integrálgörbéi mentén:

$$\dot{V}(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}\right] \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = 2x_1(-x_2 - x_1^3) + 2x_2(x_1 - x_2^3) = -2(x_1^4 + x_2^4).$$

Mivel $\dot{V}(x) < 0$ ha $x \neq 0$ és $\dot{V}(x) = 0$ ha $x = 0$, az 1. tétel feltételei teljesülnek. Így a vizsgált rendszer azonosan nulla megoldása aszimptotikusan Ljapunov stabil. Mivel a tétel

[2] Az 1 vagy 2 feltételek valamelyikét kielégítő $V(t,x)$ függvényt Ljapunov függvénynek nevezzük.

feltételei a teljes állapottérben ($\mathbb{R}^2$) teljesülnek, azt mondhatjuk, hogy az azonosan nulla megoldás globálisan aszimptotikusan stabil. $\square$

Ljapunov indirekt módszere a linearizált közelítésből következtet a nemlineáris rendszer *lokális* stabilitására.

Tétel 2 (Ljapunov indirekt módszere) *Adott az* (5) *rendszer. Vezessük be a*

$$A(t) \stackrel{def}{=} f_x(t,x)|_{x=0}$$
$$f_1(t,x) \stackrel{def}{=} f(t,x) - A(t)x$$

jelöléseket. Ha teljesül, hogy

1. $\limsup\limits_{\|x\|\to 0,\ t\geq 0} \dfrac{\|f_1(t,x)\|}{\|x\|} = 0,$

2. $A(\cdot)$ *korlátos leképezés,*

3. *a* $\dot{z} = A(t)z$ linearizált *rendszer egyenletesen aszimptotikusan stabil,*

akkor az eredeti nemlineáris *rendszer* $\xi(t) \equiv 0$*,* $t \in [a, \infty)$ *megoldása egyenletesen aszimptotikusan stabil.*

5 Kapcsolat lineáris rendszerekkel

Tekintsük az

$$\dot{x} = Ax$$

lineáris időinvariáns rendszert és a

$$V(x) =< Px, x >$$

kvadratikus alakot, ahol P egy pozitív definit[3] (ezt úgy jelöljük, hogy $P > 0$), szimmetrikus mátrix. Ebből következik, hogy minden $x \neq 0$ vektorra $V(x) > 0$. Mivel

$$\dot{V} =< P\dot{x}, x > + < Px, \dot{x} >=< PAx, x > + < Px, Ax >=< (PA + A^T P)x, x >$$

szintén kvadratikus alak, $V(x)$ akkor teljesíti az 1. tétel feltételeit ha létezik egy Q pozitív definit mátrix amely kielégíti a

$$PA + A^T P = -Q \qquad P > 0, \quad Q > 0 \tag{10}$$

un. Ljapunov egyenletet.

Lineáris rendszerek esetén az origó stabilitása globális tulajdonság és megmutatható, hogy a sajátértékek akkor és csak akkor vannak a komplex számsík bal felsíkján (i.e. negatív valós részűek), ha a Ljapunov egyenletnek van megoldása. Ezt mondja ki az alábbi tétel.

Tétel 3 *A következő állítások ekvivalensek:*

1. *az* A *mátrix minden sajátértéke a komplex számsík bal félsíkjára esik*

[3] pozitív definit mátrixok minden sajátértéke pozitív

2. *Van olyan $Q > 0$ mátrix amelyhez a (10) Ljapunov egyenletnek létezik $P > 0$ megoldása.*

3. *Minden $Q > 0$ mátrixhoz a (10) Ljapunov egyenletnek létezik $P > 0$ megoldása a*

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

alakban.

Bizonyítás: A tételből itt csak az $1 \Rightarrow 3$ állítást bizonyítjuk. Az 1. állítás szerint minden x kezdeti feltételből kiindulva, az $\dot{x} = Ax$ egyenlet $x(t) = e^{At}x$ megoldása nullához tart. Azt kell belátni, hogy a

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

mátrix pozitív definit és megoldása a (10) Ljapunov egyenletnek. A pozitív defninitség P konstrukciójából következik. (Mivel Q pozitív definit, ezért az integrálban $e^{A^T t} Q e^{At}$ minden t-re pozitív.) A Ljapunov egyenlet bal oldalán behelyettesítve, pedig

$$\begin{aligned}(PA + A^T P)x &= \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) Ax + A^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) x \\ &= \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} Ax dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} x dt\end{aligned}$$

adódik. Kihasználva, hogy a $e^{At}A$ szorzat tagjai felcserélhetőek, valamint $e^{At}x = x(t)$ és $\dot{x} = Ax$, tovább alakítjuk a kifejezést:

$$(PA + A^T P)x = \int_0^\infty e^{A^T t} Q \dot{x}(t) dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q x(t) dt.$$

Vegyük észre, hogy parciális integrálást[4] végezve az első tagon a második tag kiejthető:

$$\begin{aligned}(PA + A^T P)x &= \int_0^\infty \left[e^{A^T t} Q x(t) \right]' dt - \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q x(t) dt + A^T \int_0^\infty e^{A^T t} Q x(t) dt \\ &= e^{A^T t} Q x(t)|_0^\infty = -Qx(0) = -Qx,\end{aligned}$$

tehát a választott P valóban kielégíti a Ljapunov egyenletet. ∎

[4] $\int uv' = \int (uv)' - \int u'v$